UNDERVISNINGS MINISTERIET

Matematik A

Studentereksamen

Forsøg med digitale eksamensopgaver
med adgang til internettet

Vejledende opgave

Forår 2011

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøve 1: 2 timer med autoriseret formelsamling
Delprøve 2: 3 timer med alle hjælpemidler

Delprøve 1 består af 12 spørgsmål
Delprøve 2 består af 13 spørgsmål

Alle spørgsmål tillægges hver 10 point

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. **TEKST**
   Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. **NOTATION OG LAYOUT**
   Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. **REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION**
   Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. **FIGURER**
   I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. **KONKLUSION**
   Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøve 1

Kl. 09.00 – 11.00

Opgave 1 a) Bestem ligningen $y = ax + b$ for den rette linje, der går igennem punkterne $P(5,17)$ og $Q(8,29)$.

Opgave 2 Et observationssæt har kvartilsættet $(4, 11, 17)$. Den mindste observation er 2, og den største observation er 24.

a) Tegn et boksplot for observationssættet, og forklar betydningen af tallet 17.

Opgave 3 Om en funktion f oplyses, at $f(2) = 5$ og $f'(2) = -4$.

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(2, f(2))$.

Opgave 4 I en model kan antallet af mobilabonnementer i Afrika beskrives ved

$$N(t) = 4{,}087 \cdot 1{,}498^t ,$$

hvor $N(t)$ betegner antal mobilabonnementer (målt i mio.) til tidspunktet t (målt i år efter år 2002).

a) Gør rede for, hvad konstanterne i forskriften fortæller om udviklingen i antallet af mobilabonnementer i Afrika efter år 2002.

Kilde: www.itu.int

Opgave 5 I en trekant ABC er $\angle A = 40°$ og $\angle B = 60°$. Med v_C betegnes vinkelhalveringslinjen for vinkel *C*, og med h_c betegnes højden fra *C*.

a) Tegn en skitse af trekant ABC, hvor v_C og h_c er indtegnet, og bestem vinklen mellem v_C og h_c.

Opgave 6 Funktionen f har forskriften

$$f(x) = \sqrt{5x+3}\ .$$

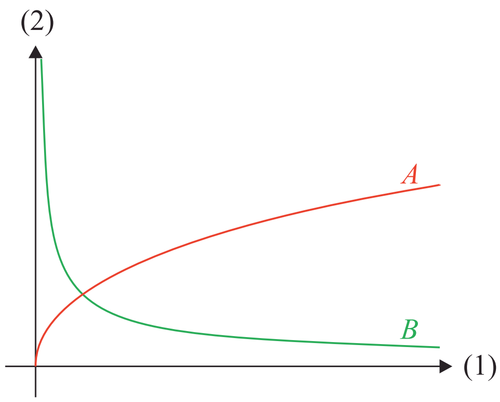
a) Bestem $f'(x)$.

Opgave 7 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2x + \mathrm{e}^x\ .$$

a) Bestem forskriften for den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $P(0,12)$.

Opgave 8 På figuren ses graferne *A* og *B* for de to funktioner henholdsvis f og dennes afledede f'.



a) Gør rede for, hvilken af graferne *A* og *B*, der er graf for f, og hvilken, der er graf for f'.

Opgave 9 I tabellen ses en række sammenhørende værdier af x og $f(x)$ for en eksponentiel funktion f.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{3}{2}$		6	12	24

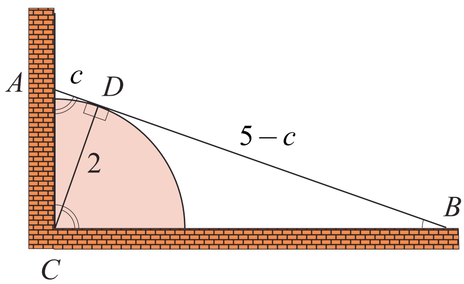
a) Benyt tabellens oplysninger til at bestemme fremskrivningsfaktoren for f samt $f(0)$.

Opgave 10

a) Vis, at $f(x) = x\ln(x) + 2x$ er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{x}.$$

Opgave 11



I et hushjørne ligger en udbygning, hvis grundplan har form som en kvartcirkel med radius 2m (se figur). En 5m lang stige placeres, så den rører de to vægge i punkterne *A* og *B* samtidig med, at den rører udbygningen i punktet *D*. Afstanden fra *A* til *D* betegnes c.

a) Gør rede for, at $\dfrac{2}{c} = \dfrac{5-c}{2}$.

b) Bestem de mulige værdier af c.

Besvarelsen afleveres kl. 11.00

Delprøve 2

Kl. 09.00 - 14.00

Opgave 12

Foto: www.colourbox.dk

Når en bil bremses stiger temperaturen i bremserne. Tabellen viser sammenhørende værdier af bilens hastighed x (målt i km/t) og temperaturstigningen y (målt i $°C$) i bremserne for en bestemt bil, der bremses helt ned.

x	25	50
y	23,9	95,0

I en model kan sammenhængen beskrives ved $y = b \cdot x^a$.

a) Bestem konstanterne a og b.

b) Benyt modellen til at bestemme temperaturstigningen i bremserne, når bilen bremses helt ned fra 150 km/t, og bestem hastigheden, når temperaturstigningen er $120°C$.

Opgave 13 I et koordinatsystem i rummet er givet en plan α med ligningen

$$15x - 17y + 16z + 13 = 0$$

og en linje l med parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -10 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og α.

Opgave 14 En andengradsligning er givet ved

$$z^2 + 2z + 5 = 0 ,$$

hvor z er et komplekst tal.

a) Bestem diskriminanten for andengradsligningen, og bestem samtlige løsninger til ligningen.

Opgave 15 a) Løs ligningen $z^6 = 729$, hvor z er et komplekst tal, og beskriv den figur, der fremkommer, når de punkter, der repræsenterer løsningerne i den komplekse talplan, forbindes med linjestykker.

Opgave 16 I tabellen ses en opgørelse over antal scorede mål for de fire bedste danske spillere ved håndbold EM for kvinder i 2010 samt hver af disse spilleres procentvise andel af det samlede antal skudforsøg for disse fire spillere.

Spiller	Scorede mål	Skudforsøg
Maibritt Kviesgaard	22	18,0%
Camilla Dalby	25	29,2%
Trine Troelsen	20	31,5%
Ann Grete Nørgård	27	21,3%
I alt	94	100%

Vi vil undersøge følgende nulhypotese:

Fordelingen af scorede mål følger fordelingen for skudforsøg for de fire spillere.

a) Bestem teststørrelsen, og undersøg på et 5 % signifikans niveau, om der er forskel på fordelingen af scorede mål og fordelingen af skudforsøg for de fire spillere.

Kilde: www.ehf-euro.com

Opgave 17 I et laboratorieforsøg har man over tid undersøgt udviklingen i udbredelsen af en bestemt type alger. Forsøget viste, at algeudbredelsen som funktion af tiden er løsning til differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}025 \cdot N \cdot (5 - N),$$

hvor $N(t)$ er algeudbredelsen (målt i mm^2) til tidspunktet t (målt i døgn).
Det oplyses, at algeudbredelsen til tidspunktet $t = 0$ var 0,02 mm^2.

a) Bestem en forskrift for $N(t)$.

b) Bestem det tidspunkt, hvor algeudbredelsen foregår hurtigst.

Opgave 18 Betragt trekant ABC i den komplekse talplan, hvor hjørnepunkterne er repræsentanter for de komplekse tal $A = 1 + 8\boldsymbol{i}$, $B = 12 + 5\boldsymbol{i}$ og $C = 10 - \boldsymbol{i}$.

a) Tegn en skitse af trekant $AB\overline{C}$ i den komplekse talplan.

Trekant ABC roteres $45°$ omkring O i den komplekse talplan, hvorved der fremkommer en ny trekant $A_1B_1C_1$.

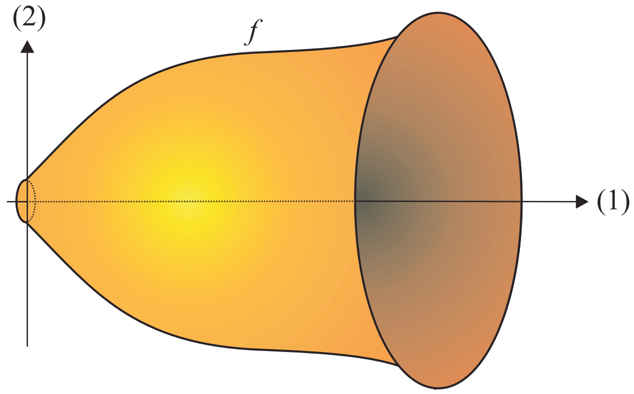
b) Bestem de komplekse tal, som hjørnepunkterne i trekant $A_1B_1C_1$ er repræsentanter for i den komplekse talplan.

VEND!

Opgave 19 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sin(x) + x + 0{,}5.$$

Grafen for f, koordinatakserne og linjen med ligningen $x = 5$ afgrænser i første kvadrant en punktmængde *M*, der har et areal.



En vase har form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden *M* drejes 360° om førsteaksen, og enheden i koordinatsystemet svarer til 1 dm.

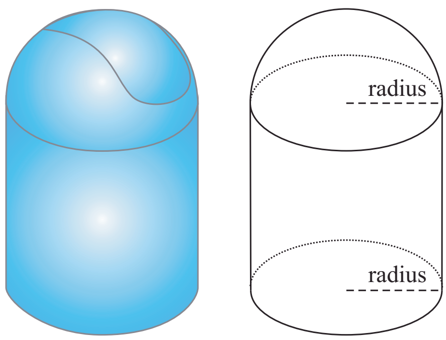
a) Bestem vasens volumen.

Det oplyses, at den krumme overflade af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når grafen for $f(x)$, $a \le x \le b$ drejes 360° omkring førsteaksen, kan beregnes ved

$$O = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\ dx\,.$$

b) Bestem arealet af vasens krumme overflade.

Opgave 20 En bestemt type plastikskraldespande har form som en cylinder sammensat med en halvkugle som vist på figuren.



Cylinderrumfanget af en af disse skraldespande skal være 120 dm^3.

a) Indfør passende variable, og bestem radius i skraldespandens bundflade, så skraldespandens samlede overfladeareal bliver mindst muligt.